# Übungen zu Mathematik I
## Blatt 7

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie aus den folgenden Angaben jeweils die zugehörige Geradengleichung in der angegebenen Form:

a) aus der Skizze in Abb. 1 in analytischer Form ($y = mx + b$).

b) durch die Punkte $A = (1, 2)$ und $B = (2, 3)$ in analytischer Form.

c) durch die Punkte $P = (0, 1, 2)$ und $Q = (0, 2, 1)$ in Parameterform. Liegen die Punkte $A = (0, 3, 1)$ und $B = (0, 0, 3)$ auf dieser Geraden?

**Lösung:**

a) Mit Hilfe eines Steigungsdreiecks erhalten wir $m = -2$. Da die Gerade die y-Achse bei drei schneidet, erhalten wir $b = 3$ und damit $y = -2 + 3$.

b) Für die Steigung gilt:

$$m = \frac{3-2}{2-1} = 1\,.$$

Wir setzen einen Punkt in die bisherige Gleichung $y = x + b$ ein und lösen nach $b$ auf. Es ergibt sich $y = x + 1$.

c) Wir wählen $\vec{p} = (0, 1, 2)^T$ als Stützvektor und $\vec{PQ} = (0, 1, -1)^T$ als Richtungsvektor:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Wir setzen die Koordinaten der Punkte für $\vec{x}$ ein und bestimmen den Parameter $\lambda$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $\lambda = 2$. Und aus der dritten $\lambda = 1$, daher liegt $A$ nicht auf $g$. Für $B$ gilt mit $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,,$$

daher liegt $B$ auf $g$.

**Aufgabe 2:** Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Polynome:

a) $x^3 - 2x = 0$

b) $x^3 - x^2 - 14x - 6 = 0$

**Lösung:**

a) Wir klammern ein $x$ aus $0 = x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$ und erhalten die Lösungen $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$.

b) Die Kandidaten für eine mögliche Nullstelle sind: $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ und $x = \pm 3$. Wir werden bei $x = -3$ fündig. Eine Polynomdivision liefert: $x^2 - 4x - 2 = 0$. Mit Hilfe der pq-Formel erhalten wir dann die restlichen Nullstellen: $x = 2 \pm \sqrt{6}$.

**Aufgabe 3:** In einem Gleichstromkreis wird der Widerstand um $30\,\Omega$ vergrößert, wobei die Stromstärke bei gleichbleibender Spannung von $220\,\mathrm{V}$ um $1.65\,\mathrm{A}$ absinkt. Wie groß sind Widerstand und Stromstärke?

**Lösung:** Es gilt das Ohmsche Gesetz $R = \frac{U}{I}$, wobei $U = 220\,\mathrm{V}$ beträgt. Aus der angegebenen Bedingung erhalten wir zusätzlich die Gleichung:

$$R + 30 = \frac{U}{I - 1.65}\,.$$

Wir haben also zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} R &= \frac{U}{I} \\ R + 30 &= \frac{U}{I - 1.65}\,. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $U = 220\,\mathrm{V}$ in beide Gleichungen ein und substituieren anschließend $R = \frac{220}{I}$ in der zweiten Gleichung, ergibt sich nach Zusammenfassen und Auflösen folgende quadratische Gleichung:

$$30I^2 - 49.5I - 363 = 0\,.$$

Durch Anwenden der p-q-Formel erhalten wir:

$$I_{1,2} = 0.825 \pm \sqrt{12.78}\,.$$

Da die Stromstärke positiv sein muss, ist $I = 4.39\,\mathrm{A}$ die einzig sinnvolle Lösung. Der Widerstandswert ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetzt: $R = 50.11\,\Omega$.

**Aufgabe 4:** Ein Werkstück mit spezifischer Wärmekapazität $c$, Masse $m$ und Oberfläche $A$ wird in einen Ofen der Temperatur 220° gestellt. Die Aufwärmkurve wird durch eine Exponentialfunktion beschrieben:

$$T(t) = 220^\circ - (220^\circ - T_0) \cdot e^{-t/\tau} \,,$$

wobei $T_0$ die Anfangstemperatur des Werkstückes zur Zeit $t = 0$ beschreibt und die Zeitkonstante $\tau$ wie folgt definiert ist:

$$\tau = \frac{mc}{\alpha A} \,.$$

Hierbei gibt $\alpha$ den Wärmeübergang an (Wärmeübergangskoeffizient).

a) Die Zeitkonstante ist ein Maß dafür, wie schnell der Aufwärmvorgang stattfindet. Sie hängt von den gegebenen Parametern ab. Nehmen wir an, dass wir den Wärmeübergangskoeffizient beeinflussen können. Wie müssen wir dann $\alpha$ verändern (größer oder kleiner machen), um den Prozess zu beschleunigen?

b) Bestimmen Sie die Zeit $t_1$, bei der das Werkstück die Temperatur $T_1 > T_0$ annimmt.

c) In der Lösung zu Teilaufgabe b) tritt ein Minuszeichen auf. Warum ist die Zeit $t_1$ trotzdem positiv?

**Lösung:**

a) Ein kleinerer Wert für $\tau$ bedeutet ein schnelleres Aufheizen, was z.B. durch Plotten für unterschiedliche Werte für $\tau$ festgestellt werden kann. Wir müssen $\alpha$ also so ändern, dass $\tau$ kleiner wird. Da $\alpha$ im Nenner steht bedeutet dies, dass $\alpha$ vergrößert werden muss. Diese Tatsache ist auch physikalisch einleuchtend: Ein größerer Wärmeübergangskoeffizient bewirkt einen besseren Wärmeaustausch, d.h. das Werkstück wird schneller warm.

b) Wir lösen die folgende Gleichung auf:

$$220^\circ - (220^\circ - T_0) \cdot e^{-t_1/\tau} = T_1 \,.$$

Umformen ergibt zunächst:

$$e^{-t_1/\tau} = \frac{220 - T_1}{220 - T_0} \,.$$

Hierauf wenden wir den natürlichen Logarithmus an und formen weiter um:

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{220 - T_1}{220 - T_0}\right) \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\tau \cdot \ln\left(\frac{220 - T_1}{220 - T_0}\right) \,.$$

c) Da $T_1 > T_0$ ist $220 - T_1 < 220 - T_0$ woraus folgt, dass der Bruch im Argument des Logarithmus kleiner eins ist. Daher ergibt sich ein negativer Wert für den Logarithmus, der durch das Minuszeichen kompensiert wird und somit eine positive Zeit $t_1$ ergibt.

**Aufgabe 5:** Wir betrachten das Skalarfeld

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

a) Bestimmen Sie die Höhenlinien. Welche Form haben diese?

b) Leiten Sie das Skalarfeld bzgl. $x$ und $y$ ab.

c) Skizzieren Sie die Höhenlinien. Wir bilden aus den beiden Ableitungen aus Teil b) einen Vektor, wobei die Ableitung nach $x$ die x-Komponente bildet und die Ableitung nach $y$ die y-Komponente. Fügen Sie das so entstandene Vektorfeld zu ihrer Skizze hinzu. Was stellen sie fest? Wie sehen die Feldlinien zu diesem Vektorfeld aus?

**Lösung**

a) Wir betrachten $x^2 + y^2 = C$. Es liegen konzentrische Kreise um den Ursprung vor, wobei $\sqrt{C}$ den Radius angibt.

b) Die Ableitungen lauten: $\partial_x f(x, y) = 2x$ und $\partial_y f(x, y) = 2y$. Hinweis: Die Studierenden kennen noch keine partiellen Ableitungen und auch noch keinen Gradienten. Dies ist eine Vorübung.

c) Die Skizze wird in Abb. 2 gezeigt. Das Vektorfeld ist natürlich der Gradient und steht damit senkrecht auf den Höhenlinien. Die Feldlinien sind Ursprungsgeraden, die ebenfalls senkrecht die Kreise schneiden. Das Vektorfeld liegt tangential zu den Feldlinien.

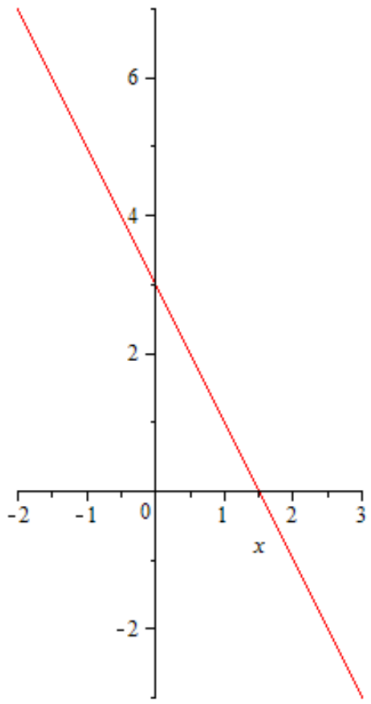



Abbildung 1: Gerade zu Aufabe 1 a)

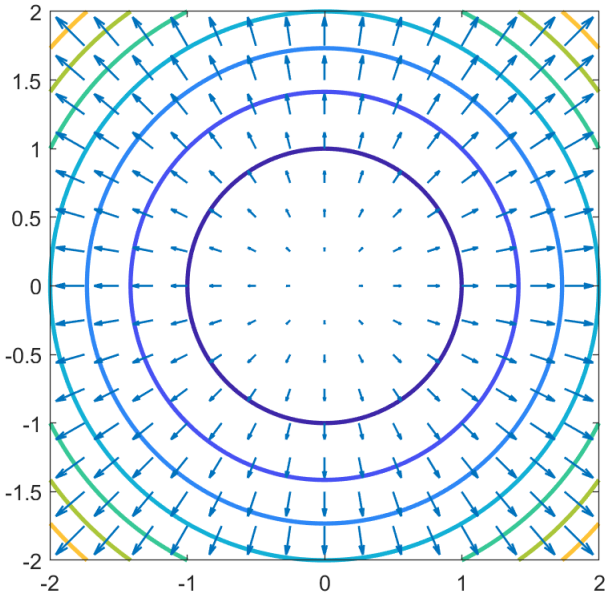



Abbildung 2: Skalarfeld und Vektorfeld (= Gradient) zu Aufg. 5